OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– FAZA PE SECTOR –
BUCUREŞTI 21.02.2004

<u>Clasa a X-a</u>

<u>Subiectul I</u>

a. Există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ strict monotone astfel încât $f\left(f\left(x\right)\right)=\left\{x\right\}$ pentru orice $x\in\left[0,1\right]$?

b. Să se rezolve ecuația $2^{1-x}+2^{\sqrt{2x-x^2}}=3$.

Costel Chiteş şi Marcel Chiriță

<u>Subiectul II</u>

Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$ cu $x_1+x_2+...+x_n=1$. Să se arate că:

$$\left(n-1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}\geq\left(n+1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}$$

Andrei Chiteş

<u>Subiectul III</u>

Fie şirul $\left(x_n\right)_{n\geq1}$ astfel încât $x_1=x_2=1$, $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$, $\forall n\geq1$. Fie $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k\cdot x_{k+2}}$, $\forall n\geq1$. Să se determine n minim $n\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $a_n>\frac{99}{100}$.

Costel Chiteş şi Daniel Grigorescu

<u>Subiectul IV</u>

Fie $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_n$ n puncte pe cercul unitate cu centrul în origine. Dacă D_j $1\leq j\leq n$ sunt discurile inchise cu raza 1 cu centrele în $\mathrm{A}_j, 1\leq j\leq n$, aflați $\bigcap_{j=1}^{n}\mathrm{D}_j$.

Sorin Rădulescu şi Costel Chiteş

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv 3 ore.
Subiectele se notează intre 0 şi 7 puncte.